Cho $f: E \to F$ là ánh xạ tuyến tính. Ký hiệu E^*, F^* ①

là các lượt đối ngẫu của E và F.

Tức là $E^* =$ tập tất cả các ánh xạ t² $\Delta: E \to \mathbb{R}$.

. G/s $\{\vec{\alpha_1}, \dots, \vec{\alpha_n}\}$ là cơ sở của E và $\{\vec{\beta_1}, \dots, \vec{\beta_m}\}$ là cơ sở của F. G/s A là matrận của f trong cặp cơ sở này, tức là $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n}$ thì

$$f(\vec{\alpha_j}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{\beta_i}$$

<u>Cơ sở đối ngẫu của</u> $\{\vec{\alpha_1}, \dots, \vec{\alpha_n}\}$ là cơ sở ~~...~~ $\{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}$

• của E^* thỏa $\alpha_i^*(\vec{\alpha_j}) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i \neq j \\ 1 & \text{nếu } i = j \end{cases}$

. Tương tự, ký hiệu $\{\beta_1^*, \dots, \beta_m^*\}$ là cơ sở đối ngẫu của $\{\vec{\beta_1}, \dots, \vec{\beta_m}\}$.

• <u>Ánh xạ t² đối ngẫu</u> của $f: E \to F$ là ánh xạ $f^*: F^* \to E^*$ được đ/n bởi quan hệ

$$\left(f^*(\varphi)\right)(\vec{v}) = \varphi\left(f(\vec{v})\right) \qquad \forall \varphi \in F^*, \ \forall \vec{v} \in E.$$

(Người ta hay ký hiệu như sau $\langle f^*\varphi, \vec{v} \rangle = \langle \varphi, f(\vec{v}) \rangle$, đây là lối viết kiểu giải tích hàm)

• f^* là ánh xạ tuyến tính. Bây giờ ta c/m A^T là matrận của f^* trong cặp cơ sở $\{\beta_1^*, \dots, \beta_m^*\}$ và $\{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}$.

Ta viết $f^*(\beta_j^*) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i^*$

và ta phải chm $b_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j.$

Ta có $b_{ij} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\alpha_i^*, \vec{\alpha_i} \right\rangle$

$$= \langle f^*(\beta_j^*), \vec{\alpha_i} \rangle$$

$$= \langle \beta_j^*, f(\vec{\alpha_i}) \rangle$$

$$= \left\langle \beta_j^*, \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\vec{\beta_k} \right\rangle$$

$$= a_{ji}$$

Vậy A^T là matrận của f^* đối với cặp cơ sở $\{\beta_1^*, \dots, \beta_m^*\}$ và $\{\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*\}$.

<u>Hệ quả 1</u>: f là đơn cấu $\Leftrightarrow$ f^* là toàn cấu
f là toàn cấu $\Leftrightarrow$ f^* là đơn cấu.

<u>Hệ quả 2</u>: rank A = rank A^T
do đó hạng theo cột hay dòng là như nhau.

<u>Hệ quả p² chuẩn</u>: "đơn cấu" hay "toàn cấu" là $\underline{1}$ đối với axa t^2.